ক্যাটাগরি: সেকেন্ডারি (৯ম-১০ম) **সময়: ৪ ঘন্টা**

Category: Secondary (ix - x) **Time: 4 hours**

মূল উত্তরপত্রে সমস্যার সমাধান করতে হবে। সকল সংখ্যা ইংরেজিতে লেখা। প্রতিটি প্রশ্নের মান সমান। প্রশ্নগুলো কাঠিন্যের ক্রমবর্ধমান ক্রমে সাজানো হয়েছে। সমস্যাগুলোর সমাধানে আংশিক নম্বর প্রদান প্রযোজ্য।

১. একটি পার্টিতে তুমি ছাড়াও আরো **20** জন লোক রয়েছে। ঐ পার্টিতে তুমি যতজনকে চেন, আবার ঠিক ততজনকেই চেননা। তুমি কতজনকে চেন?

There are **20** people in a party excluding you. It is known that you know the same number of people as you don't know. How many of them do you know?

২. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের **B** কোণটি সমকোণ এবং **AB = 3**। এর যেকোন একটি শীর্ষকে কেন্দ্র করে একটি একক ব্যাসার্ধের বৃত্ত আঁকা হল। ত্রিভুজের যে অংশ বৃত্তের অন্তর্ভূক্ত নয় তার সর্বোচ্চ ক্ষেত্রফল বের কর।

Isosceles triangle **ABC** is right angled at **B** and **AB = 3**. A circle of unit radius is drawn with its centre on any of the vertices of this triangle. Find the maximum value of the area of that part of the triangle that is not shared by the circle.

৩. বাস্তব সংখ্যায় সমাধান নির্ণয় করঃ $\frac{|x^2-1|}{x-2}=x$

[সাহায্যঃ $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের সমাধান হল $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$]

Solve for real **x**: $\frac{|x^2-1|}{x-2}=x$

[Hint: The solutions to the equation $ax^2+bx+c=0$ are $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$]

৪. একটি ধারাকে নিচের সংজ্ঞা অনুযায়ী গঠন করা হলঃ

A(1) = 1
A(n) = f(m) সংখ্যক **f(m)** এবং তার পর **f(m)** সংখ্যক **0**;
এখানে **m** হচ্ছে **A(n-1)** এর অংক সংখ্যা।

A(30) নির্ণয় কর। উল্লেখ্য, **m** কে **9** দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে সেটিই **f(m)**।

A series is formed in the following manner:

A(1) = 1;
A(n) = f(m) numbers of **f(m)** followed by **f(m)** numbers of **0**;
m is the number of digits in **A(n-1)**

Find **A(30).** Here **f(m)** is the remainder when **m** is divided by **9.**

৫. **ABC** ত্রিভুজের **B** কোণটি সমকোণ। $\angle$**BAC** এর সমদ্বিখণ্ডক **BC** কে **D** বিন্দুতে ছেদ করে। **G** এই ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু। **GD||** **AB** হলে $\angle$**C** এর মান নির্ণয় কর।

Triangle **ABC** is right angled at **B**. The bisector of $\angle$**BAC** meets **BC** at **D**. Let **G** denote the centroid (common point of the medians) of the triangle **ABC**. Suppose that **GD** is parallel to **AB**. Find $\angle$**C**.

৬. যথাযথ প্রমাণসহ এমন সকল পূর্ণবর্গ সংখ্যা নির্ণয় কর যারা চারটি ক্রমিক ধনাত্মক বেজোড় সংখ্যার গুণফল।

Find, with proof, all the perfect squares each of which is the product of four consecutive odd natural numbers.

৭. যথাযথ প্রমাণসহ ছয় অংকের **13**45*** সংখ্যাটিতে প্রত্যেকটি তারকাচিহ্নকে (*) ভিন্ন ভিন্ন অংক দ্বারা প্রতিস্থাপিত কর যেন সংখ্যাটি **792** দ্বারা বিভাজ্য হয়।

Replace each asterisk with proof in the six digit number **13**45*** by different digits such that the resulting number is divisible by **792**.

৮. **ABC** ত্রিভুজের **A** কোণটি সমকোণ। **BC** এর উপর **D** একটি বিন্দু। **AC** এবং **AB** এর সাপেক্ষে **D** এর প্রতিফলন যথাক্রমে **E** এবং **F** । দেখাও যে, **[ABC]** $\geq$ **[DEF]** এবং সমতা হবার জন্য **D** এর সকল সম্ভাব্য অবস্থান নির্ণয় কর। (**[x]** দ্বারা **x** এর ক্ষেত্রফল নির্দেশ করা হচ্ছে)

Triangle **ABC** is right angled at **A**. Let **D** be a point on **BC**. **E** and **F** are reflections of **D** on **AC** and **AB** respectively. Prove that **[ABC]** $\geq$ **[DEF]**. Find all possible positions of **D** for equality. (Here **[x]** denotes the area of **x**)

৯. এমন সকল মৌলিক সংখ্যা **p** এবং ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা **a, b** নির্ণয় কর যেন $p^a + p^b$ একটি পূর্ণ বর্গ হয়।

Find all the prime numbers **p** and positive integers **a** and **b** such that $p^a + p^b$ is the square of an integer.

১০. **131** টি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার একটি সেটে যেকোন সংখ্যার মৌলিক উৎপাদকগুলো **42** এর চেয়ে ছোট। দেখাও যে, এই সেট থেকে এমন চারটি সংখ্যা নির্বাচন করা যাবে যেন তাদের গুণফল একটি পূর্ণ বর্গ হয়।

In a set of **131** natural numbers, no number has a prime factor greater than **42**. Prove that it is possible to choose four numbers from this set such that their product is a perfect square.